無限級数と無限の概念

1＝2！？

5 班　大場崇翔　小枝優日　小松田昇葵
今野玄太　柳沼諒

1. 研究の動機

数学Ⅱの数列や数学Ⅲの極限と無限級数の単元についてもっと深く知りたいと思ったから。

2. 研究の方法

研究を始めるにあたり、無限級数の理解のため数学 B 数列、数学Ⅲ極限の予習を行う。解析学の級数について本・論文で調べる。専門書を読み、省略された証明を自分たちで行う。リーマンの再配列定理に基づき関数電卓を用いた収束値の計算を行う。

3. 研究の結果と考察

無限級数とは、数列（ある法則に従って並んだ数の列）の項を無限に足し合わせたものである。

無限級数の例

① 自然数の無限和

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+4+5+\cdots=\infty$$

この級数が発散することは自明である。

②２の累乗の逆数の無限和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=1$$

このことは正方形の面積の無限分割によって証明することができる。

③メルカトル級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\log_e 2$$

この級数は$\log_e 2$に収束する（以下底 e は省略）

証明は後述した。

以下、このメルカトル級数を利用している。

ここで、この級数を次のように並べ替えると

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\cdots$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\cdots$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{2}\log 2$$

となる。すなわち、

$$\log 2=\frac{1}{2}\log 2 \Leftrightarrow 1=2$$

となり、数学的に間違った結果を得る。

これは、メルカトル級数が条件収束級数（元の級数が収束し、すべての項に絶対値を付けた級数が正の無限大に発散する級数）であるのにもかかわらず項を並び替えた収束値を等号で結んでしまったことが原因である。

また、このことから任意の実数に収束させることもできる。これを、「リーマンの再配列定理」という。「リーマンの再配列定理」とは『条件収束する級数は項を適当に並び替えることで任意の実数に収束させることができる。』という定理である。ここで言う「項を適当に並び替える」とは、収束値を丁度超えるまで正の項を足し、丁度下回るまで負の項を足す。この操作を繰り返すことである。

以下、関数電卓を利用し、小数第 4 位までの近似値を収束値とした。

(1) π=3.1415 に収束させる

1+1/3+1/5+…+1/151	=3.1471
3.1471−1/2	=2.6471
2.6471+1/153+…+1/409	=3.1432
3.1432−1/4	=2.8932
2.8932+1/411+…+1/673	=3.1417
3.1417−1/6	=2.9751
2.9751+1/675+…+1/939	=**3.1415**

(2)√5=2,2361 に収束させる

1+1/3+⋯+1/27	=2.3013
2.3013−1/2	=1.8013
1.8013+1/29+⋯＋1/67	=2.2448
2.2448−1/4	=1.9948
1.9948+1/69+⋯+1/111	=2.2442
2.2442−1/6	=2.0776
2.0776+1/113+⋯+1/153	**=2.2361**

(3)√7=2.6458 に収束させる

1+1/3+1/5+⋯+1/55	=2.6479
2.6479−1/2	=2.1479
2.1479+1/57+⋯+1/151	=2.6471
2.6471−1/4	=2.3971
2.3971+1/153+⋯+1/249	=**2.6458**

(4)e=2.7183 に収束させる

1+1/3+1/5+⋯+1/67	=2.7450
2.7450−1/2	=2.2450
2.2450+1/69+⋯+1/175	=2.7205
2.7205−1/4	=2.4705
2.4705+1/177+⋯+1/289	=2.7202
2.7202−1/6	=2.5535
2.5535+1/291+⋯+1/403	=2.7192
2.7192−1/8	=2.5942
2.5942+1/405+⋯+1/517	**=2.7183**

4. まとめ

無限級数には項を並び替えても和が変わらないもの（絶対収束級数）と項を並び替えると和が変わってしまうもの（条件収束級数）がある。項を並び替えるだけで和が変わることは今までのルールに反することであり、今回は世界を無限に広げてしまったので新たなルールを考える必要があることがわかった。

5. 反省と課題

今回の課題研究では高校数学の範囲を超えた内容を扱ったので、全員が理解できるように具体例や図を用いるなど様々な工夫をした。今回身につけた知識を基により難しい問題にも取り組んでいきたい。

6. 参考文献

・チャート研究所（2019）『チャート式　基礎からの数学Ⅱ+B』数研出版

・チャート研究所（2018）『チャート式　基礎からの数学Ⅲ』数研出版

・加藤文元（2019）『数研講座シリーズ　大学教養　微分積分』数研出版

・倪永茂（2014）論文『無限級数及びその数値計算について』

7. 参考資料

メルカトル級数が$\log 2$に収束することの証明は以下の通りである。

証明

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\right)-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

ここで、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\log 2$$

終

8. 謝辞

今回の課題研究にあたり、ご指導してくださった髙田先生、堤先生に心より御礼申し上げます。